Sobre a existêcia de standing-waves para a equação de Schrödinger não-linear não-local

Orientador: Roger Peres de Moura

Orientando: Lucas Cassiano de Sene Sousa

1. Introdução.

O objetivo principal do presente trabalho é o estudo da existência de standing-waves para a equação de Schrödinger não-linear não-local

$$u_t + iu_{xx} = 2uP_+(|u|^2)_x - i\kappa u\mathcal{L}_h(|u|^2) + i\gamma|u|^2u, \tag{1}$$

que é um modelo para o estudo de propagação de pacotes de ondas em fluidos extratificados. Aqui, $u = u(x,t)$ é uma função complexa que representa o invólucro das ondas e o coeficiente $\gamma \geq 0$ é o parâmetro de estratificação do fluido, $\kappa \in \{0,1\}$ e $\mathcal{L}_h(\cdot) = (\mathcal{H} - T_h)\partial_x(\cdot)$, com $\mathcal{H}$ a denotar a transformada de Hilbert e $T_h(\cdot)$ o operado integral singular na variável x, definido por,

$$T_h f(x) = v.p.\frac{1}{\pi}\int \coth\left(\frac{\pi(y-x)}{2h}\right) f(y)dy, \tag{2}$$

onde h é um parâmetro proporcional à profundidade do fluido e v.p. é o funcional valor principal.

2. Metodologia.

No decorrer da vigência da bolsa apresentamos seminánios semanais para o orientador com o objetivo de aprender os pré-requisitos para estudar o problema principal. Mais precisamente estudamos em cada mês os seguintes tópicos:

Noções de espaços métricos. Além do conceito de métrica, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e outros tópicos básicos da teoria, estudamos o Teorema do Ponto Fixo para contrações e vimos algumas aplicações.

Em seguida estudamos noções de Medida e Integração e de Análise Funcional. O objetivo principal foi aprender as desigualdades de Hölder e de Minkowski (veja [5]), noções de Espaços de Hilbert e suas propriedades; em particular estudamos o espaço L^2(veja [5]), cuja importância tanto na Física quanto na Matemática se dá devido a sua simetria, no sentido de que ele é seu proprio dual. Como aplicação estudamos Séries de Fourier com aplicações às equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem. Também aplicamos a teoria de espaços de Hilbert no estudo da Transformada de Fourier em L^1, no espaço de Schwartz e em L^2.

3. Resultados e Discussões.

Estudamos noções de Espaços Métricos, Medida e Integração e Análise Funcional. Entre os tópicos estudados destacamos: Espaços Normados e de Banach, Espaços de Hilbert. Além disso, estudamos os espaços de Lebesgue L^p e as desigualdades de Hölder e Minkowski nesses espaços. Estudamos a Transformada de Fourier e suas propriedades.

Agora apresentaremos o resultado principal de nosso projeto: Provamos a não existência de soluções standing waves, para a equação (1), com $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma \geq 0$ arbitrário. Soluções do tipo standing waves para a equação (3) são funções da forma

$$v(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x), \tag{3}$$

onde $x, t \in \mathbb{R}, \omega$ é uma constante real e $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real suave.

A estratégia é provar o resultado para a seguinte equação gauge-equivalente à equação (1):

$$v_t = -iv_{xx} + \frac{i}{4}|v|^4 v - iv\mathcal{H}(|v|^2)_x + i\gamma |v|^2 v. \tag{4}$$

Para isso procedemos como no caso da equação de Schrödinger defocusing unidimensional com expoente crítico, pois tal equação está inserida na equação (4). Fizemos uso de uma identidade de Pohozaev e por meio dela provamos (por contradição) que a equação (4) não possui standing waves. Enunciamos abaixo uma importante propriedade da trasformada de Hilbert essencial em nossa demonstração:

Lema 0.0.1 *Dada qualquer função $f \in S(\mathbb{R})$, temos que,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf'\mathcal{H}(f')dx = 0.$$

Com isso enunciamos o teorema principal do nosso trabalho:

Teorema 0.0.2 *Não existem soluções da forma $v(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ para a equação (3), quando $\omega \in \mathbb{R}, \gamma \geq 0, \varphi$ é suave e satisfaz propriedades de decaimento da forma*

$$x\varphi^{(n)}(x) \longrightarrow 0 \quad quando \quad |x| \longrightarrow \infty.$$

4. Conclusão.

Todos os estudos foram acompanhados por apresentações semanais de seminários para o orientador e consultas periódicas, tanto ao orientador como às referências bibliográficas, para esclarecimentos de dúvidas.

Concluímos quase todo o projeto até o final do prazo estabelecido pelo cronograma.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger; Soluções; Standing waves.

Apoio: O trabalho foi financiado pelo PIBIC - UFPI.

5. Referências Bibliográficas.

[1] Angulo, J.. **Existence and stability of solitary wave solutions to nonlinear dispersive evolution equations.** 24º Colóquio Brasileirode Matemática. Publicações Matemáticas - IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[2] Angulo, J. and Moura, R. P., The Cauchy problem and the nonexistence of standing waves solutions for the nonlocal nonlinear Schrödinger Equacion, Differential and Integral Equations, no. 10, vol. 20, (2007), 1107 - 1130.

[3] Domingues, H.. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. Atual Editora - USP, São Paulo, 1982.

[4] Foland, G. B., **Real Analysis, Mordern Techniques and their Applications**, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[5] Kreyszig, E., **Introductory Functional Analysis with Applications**, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[6] Moura, R. P., O Problema de Cauchy para equação de Schrödinger não-linear não-local, PhD Thesis, Instittuto de Matemática e Estatística e Computação Científica - IMECC, Unicamp, Campinas, Brasil, 2005.

[7] Pelinovsky, D. E., Intermediate nonlinear Schrödinger equation for internal waves in a ffluid of finite depth, Phys. Lett. A **196** (1995), 401-406.

[8] Pelinovsky, D. E.; Grinmshaw, R. H. J., Nonlocal Models for Envelope Waves in a Stratified Fluid, Stud. Appl. Math. **97** (1996), 369-391.